

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»



ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
Кафедра прикладної математики

Ю.Б. Олевська

ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Методичні рекомендації до практичних занять
для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 113 (F1) Прикладна математика

Дніпро
НТУ «ДП»
2025

Функціональний аналіз [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до практичних занять для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 113 (F1) Прикладна математика / уклад. Ю.Б. Олевська ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2025. – 20 с.

Укладач:

Ю.Б. Олевська, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Затверджено науково-методичною комісією спеціальності F1 Прикладна математика (113 Прикладна математика) (протокол № 5-1/25 від 28.05.2025 р.) за поданням кафедри прикладної математики (протокол № 5/25 від 27.05.2025 р.).

Методичні рекомендації містять завдання до практичних занять з дисципліни «Функціональний аналіз» для студентів спеціальності 113 (F1) Прикладна математика.

Орієнтовано на активізацію навчальної діяльності здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 113 (F1) Прикладна математика та закріплення практичних навичок у засвоєнні дисципліни «Функціональний аналіз».

Відповідальна за випуск завідувачка кафедри прикладної математики,
О.О. Сдвижкова, д-р техн. наук, проф.

ЗМІСТ

	Стор.
Вступ	4
1 Розв'язання задач за темами з теорії множин	5
2 Дослідження належності функцій певним метричним просторам	6
3 Обчислення інтеграла Лебега	7
4 Обчислення інтеграла Лебега-Стільтєса	10
5 Застосування принципу стискаючих відображень до розв'язування систем лінійних рівнянь	12
6 Застосування принципу стискаючих відображень до розв'язування диференціальних рівнянь	14
7 Застосування принципу стискаючих відображень до розв'язування інтегральних рівнянь	16
Список рекомендованих джерел	19

ВСТУП

Методичні рекомендації призначені для розвитку та засвоєння навичок використання теоретичного матеріалу при розв'язанні практичних завдань студентів спеціальності 113 (F1) Прикладна математика, що вивчають дисципліну «Функціональний аналіз».

Методичні рекомендації містять завдання, які спрямовані на опрацювання засвоєного матеріалу згідно з програмою дисципліни, як абстрактного, так і маючого практичне застосування у розрахункових дослідженнях. Запропоновано по 10 варіантів задач на кожную тему.

Список рекомендованих джерел містить посібники з лекційним матеріалом та посібники з матеріалом методичного характеру, що охоплює коло запропонованих задач.

Аудиторне практичне заняття складається з двох змістовних частин: перша частина містить у собі детальний розгляд прикладу розв'язання задачі з обговоренням всіх питань та пропозицій студентів; друга частина передбачає самостійну роботу студентів під час практичного заняття та, якщо часу заняття не вистачає або задача за своєю специфікою є досить громіздкою, закінчення розв'язку в сенсі виконання домашнього завдання. Перед початком розгляду прикладу з'ясовуються відповідні теоретичні основи матеріалу [1–3]. Напочатку самостійного розв'язку задач завдяки ідентичної концепції відбувається їх попереднє загальне обговорення та з'ясовуються аналогії з розв'язком вищезазначеного прикладу. Для поглибленого вивчення матеріалу можуть бути рекомендовані додаткові приклади [4, 5].

Завдання практичних занять № 1-4 передбачають по два приклади, а) та б), для самостійного розв'язку, а завдання практичних занять № 5-7 – по одному прикладу у зв'язку з різною складністю та громіздкістю задач.

Виконавши завдання свого варіанту, студент повинен продемонструвати викладачеві роботу на комп'ютері або в зошиті. Такий поточний контроль виконання надає можливість послідовного засвоєння матеріалу студентом та обговорення можливих помилок з викладачем з метою перевірки розуміння попереднього матеріалу перед викладанням наступного. За кожне завдання згідно з наведеними таблицями нараховуються бали, які в кінці семестру складатимуть оцінку з практичної складової частини курсу. На виконання кожного типу задач виділяється один тиждень, після чого кожен зайвий день вважається простроченим.

При своєчасному та правильному виконанні всіх задач свого варіанту здобувач отримує оцінку 100. При несвоєчасному виконанні завдання -1 бал за кожен прострочений день.

1 РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЗА ТЕМАМИ З ТЕОРІЇ МНОЖИН

Тема заняття: розв'язання задач за темами з теорії множин.

Мета заняття: формування вмінь і навичок практичного застосування знань через виконання здобувачами завдань та вправ, розв'язування задач.

Очікувані результати навчання: вміти формалізувати задачі, сформульовані мовою функціонального аналізу.

Теоретичний матеріал: [1, с. 4–12].

Методика виконання: використання властивостей операцій над множинами, **наприклад**, довести, що

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Розв'язок.

Потрібно довести, що з того, що $x \in A \Delta B$, випливає, що $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Дійсно, нехай $x \in A \Delta B$. Тоді за означенням $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, тобто $x \in A$ та $x \notin B$ або $x \in B$ та $x \notin A$. З цього випливає, що x не належить спільним частинам множин A та B , але належить їх частинам, що відрізняються одна від одної, тобто не належить їх перетину: $x \in A \cup B$, $x \notin A \cap B$. Звідси маємо, що $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Задача 1, варіанти 1-10. Для довільних множин A, B, C, D довести рівності.

№ варіанту	Завдання
1, 2	а) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; б) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
3, 4	а) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$; б) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
5, 6	а) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$; б) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
7, 8	а) $A \setminus (B \cap C \cap D) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (A \setminus D)$; б) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
9, 10	а) $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$ ($A, B \subset X$); б) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Критерії оцінювання практичного заняття:

Задача 1			
Бали	Критерій		
8	Розв'язання задачі свого варіанту	8	Студент правильно, в повному об'ємі виконує практичне завдання згідно з наданими методичними інструкціями
		-2	-2 бали за кожну помилку
-1	Термін виконання	-1	При несвоєчасному виконанні завдання -1 бал за кожен прострочений день
Максимальна кількість балів: 8			

2 ДОСЛІДЖЕННЯ НАЛЕЖНОСТІ ФУНКЦІЙ ПЕВНИМ МЕТРИЧНИМ ПРОСТОРАМ

Тема заняття: дослідження належності функцій певним метричним просторам.

Мета заняття: формування вмінь і навичок практичного застосування знань через виконання здобувачами завдань та вправ, розв'язування задач.

Очікувані результати навчання: вміти формулювати математичну постановку завдання та обирати раціональний метод вирішення.

Теоретичний матеріал: [1, с. 14–23].

Методика виконання: використання означень метрики в різних метричних просторах **наприклад**, перевірити, чи належить функція $x(t) = \sqrt[3]{t}$ метричним просторам $C[-1; 1]$, $C^1[-1; 1]$, $C^2[-1; 1]$.

Розв'язок.

$C[a; b]$: X – множина всіх неперервних на $[a; b]$ функцій;

$C^1[a; b]$: X – множина всіх диференційовних на $[a; b]$ функцій;

$C^2[a; b]$: X – множина всіх диференційовних в квадраті на $[a; b]$ функцій.

Функція $x = \sqrt[3]{t}$ неперервна на відрізку $[-1; 1]$, значить, $x \in C[-1; 1]$.
Обчислимо похідну:

$$x'(t) = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}.$$

Отримана функція має розрив у точці $t = 0$, звідки випливає, що $x \notin C^1[-1; 1]$. Виходячи з того, що $C^2[-1; 1] \subset C^1[-1; 1]$, робимо висновок, що $x \notin C^2[-1; 1]$.

Задача 2, варіанти 1-10. Перевірити, чи належить функція $x = x(t)$ метричним просторам $C[-1; 1]$, $C^1[-1; 1]$, $C^2[-1; 1]$.

№	Завдання	
1, 2	а) $x(t) = \arccos \frac{t}{2}$;	б) $x(t) = t^2 - 4 $.
3, 4	а) $x(t) = t - 3 + 1$;	б) $x(t) = 1 - \sqrt{1 - t^2}$.
5, 6	а) $x(t) = \sqrt{1 - t^2}$;	б) $x(t) = e^{ t }$.
7, 8	а) $x(t) = \arcsin t$;	б) $x(t) = \cos t $.
9, 10	а) $x(t) = 2t^2 - t $;	б) $x(t) = \operatorname{tg} t $.

Критерії оцінювання практичного заняття:

Задача 2			
Бали	Критерій		
8	Розв'язання задачі свого варіанту	8	Студент правильно, в повному об'ємі виконує практичне завдання згідно з наданими методичними інструкціями
		-2	-2 бали за кожен помилку
-1	Термін виконання	-1	При несвоєчасному виконанні завдання -1 бал за кожен прострочений день
Максимальна кількість балів: 8			

3 ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА

Тема заняття: обчислення інтеграла Лебега.

Мета заняття: формування вмінь і навичок практичного застосування знань через виконання здобувачами завдань та вправ, розв'язування задач.

Очікувані результати навчання: вміти розв'язувати отримані задачі аналітичними методами.

Теоретичний матеріал: [2, с. 4–16].

Методика виконання: використання властивостей міри та інтеграла Лебега, наприклад, обчислити інтеграл Лебега від функції

$$f(x) = \begin{cases} 5x, & x \in [0; 2] \cap \mathbb{Q}, \\ 7x^2, & x \in [0; 2] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Розв'язок.

Функція $f(x) = 5x$ в усіх раціональних точках відрізка $[0; 2]$ та $f(x) = 7x^2$ в усіх ірраціональних точках цього відрізка.

$$5x = 7x^2; \quad 7x^2 - 5x = 0; \quad x(7x - 5) = 0; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{5}{7}.$$

Отже, функція $f(x)$ має розриви у кожній точці відрізка крім точок

$$x = 0; \quad x = \frac{5}{7}.$$

Тому $f(x)$ не інтегровна за Ріманом на відріжку $[0; 2]$. Але ми маємо, що міра множини $[0; 2] \cap \mathbb{Q}$ дорівнює нулю, тобто еквівалентна до функції $f(x)$ функція

$$g(x) = 7x^2$$

інтегровна за Ріманом на $[0; 2]$, тому функція $f(x)$ інтегровна за Лебегом. Маємо:

$$\int_{[0;2]} f(x) d\mu = \int_{[0;2]} g(x) d\mu = \int_0^2 7x^2 dx = 7 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{7 \cdot 8}{3} = \frac{56}{3}.$$

Задача 3, варіанти 1-10. Обчислити інтеграл Лебега.

№	Завдання
1, 2	а) $\int_{[0;2]} f(x) d\mu, \quad f(x) = \begin{cases} \sin \frac{x}{2}, & x \in [0; 2] \setminus \mathbb{Q}, \\ \cos x^2, & x \in [0; 2] \cap \mathbb{Q}; \end{cases}$ б) $\int_{[0;1]} f(x) d\mu, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x - \sqrt{2}}, & x \in [0; 1] \cap \mathbb{Q}, \\ e^x, & x \in (0; 1) \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$
3, 4	а) $\int_{[-\frac{1}{e}; e]} f(x) d\mu, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, & x \in [-\frac{1}{e}; e] \setminus \mathbb{Q}, \\ \operatorname{arctg} 2x, & x \in [-\frac{1}{e}; e] \cap \mathbb{Q}; \end{cases}$ б) $\int_{[-1;1]} f(x) d\mu, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, & x \in [-1; 1] \setminus \mathbb{Q}, \\ \operatorname{tg} 2x, & x \in [-1; 1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$

№	Завдання	
5, 6	а) $\int_{[1;\pi]} f(x)d\mu,$	$f(x) = \begin{cases} \sin x^3, x \in [1;\pi] \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{x+2}, x \in [1;\pi] \cap \mathbb{Q}; \end{cases}$
	б) $\int_{[0;2]} f(x)d\mu,$	$f(x) = \begin{cases} \sin x, x \in [0;2] \setminus \mathbb{Q}, \\ \cos x^2, x \in [0;2] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$
7, 8	а) $\int_{[1;2]} f(x)d\mu,$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-5}, x \in [1;2] \setminus \mathbb{Q}, \\ \operatorname{tg} x, x \in [1;2] \cap \mathbb{Q}; \end{cases}$
	б) $\int_{[0;1]} f(x)d\mu,$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x-1}, x \in [0;1] \cap \mathbb{Q}, \\ e^{4x}, x \in (0;1) \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$
9, 10	а) $\int_{[1;\pi]} f(x)d\mu,$	$f(x) = \begin{cases} \sin x - 1, x \in [1;\pi] \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{x+2}, x \in [1;\pi] \cap \mathbb{Q}; \end{cases}$
	б) $\int_{[-1;1]} f(x)d\mu,$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3}, x \in [-1;1] \setminus \mathbb{Q}, \\ \operatorname{ctg} 2x, x \in [-1;1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$

Критерії оцінювання практичного заняття:

Задача 3			
Бали	Критерій		
15	Розв'язання задачі свого варіанту	15	Студент правильно, в повному об'ємі виконує практичне завдання згідно з наданими методичними інструкціями
		-2	-2 бали за кожну помилку
-1	Термін виконання	-1	При несвоєчасному виконанні завдання -1 бал за кожен прострочений день
Максимальна кількість балів: 15			

4 ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА-СТІЛЬТЬЕСА

Тема заняття: обчислення інтеграла Лебега-Стільтєса.

Мета заняття: формування вмінь і навичок практичного застосування знань через виконання здобувачами завдань та вправ, розв'язування задач.

Очікувані результати навчання: вміти розв'язувати отримані задачі аналітичними методами.

Теоретичний матеріал: [2, с. 39–44].

Методика виконання: використання означення та властивостей інтеграла Лебега-Стільтєса, **наприклад**, обчислити інтеграл Лебега-Стільтєса, де

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dF(x), \quad f(x) = 3x + 1, \quad F(x) = \begin{cases} -x^2, & x \in [-1; 0], \\ x + 4, & x \in (0; 1]. \end{cases}$$

Розв'язок.

Оскільки $F(x) = \varphi(x) + h(x)$, де функції

$$\varphi(x) = \begin{cases} -x^2, & x \in [-1; 0], \\ x, & x \in (0; 1], \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1; 0], \\ 4, & x \in (0; 1], \end{cases}$$

монотонно неспадні на відрізку $[-1; 1]$, причому функція $\varphi(x)$ абсолютно неперервна, а $h(x)$ – функція стрибків з єдиним розривом у точці $x_1 = 0$ та стрибком $h_1 = 4$, маємо:

$$\varphi'(x) = \begin{cases} -2x, & x \in [-1; 0], \\ 1, & x \in (0; 1]; \end{cases} \quad f(x_1)h_1 = f(0) \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12;$$

$$\begin{aligned} \int_{[-1;1]} f(x) d\mu_F &= \int_{[-1;1]} f(x) \varphi'(x) d\mu + f(x_1)h_1 = \\ &= \int_{-1}^0 (3x + 1)(-2x) dx + \int_0^1 (3x + 1) dx + 12 = \\ &= - \int_{-1}^0 (6x^2 + 2x) dx + \int_0^1 (3x + 1) dx + 12 = \\ &= - \left(6 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(3 \cdot \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1 + 12 = \end{aligned}$$

$$= -2 + 1 + \frac{3}{2} + 1 + 12 = \frac{3}{2} + 12 = \frac{27}{2}.$$

Задача 4, варіанти 1-10. Обчислити інтеграл Лебега-Стільтєса,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dF(x)$$

де

$$F(x) = \begin{cases} -2x^3, & x \in [-1; 0], \\ x + 5, & x \in (0; 1]. \end{cases}$$

№	Завдання	
1, 2	а) $f(x) = 4x - 7$;	б) $f(x) = e^{2x}$.
3, 4	а) $f(x) = -x + 3$;	б) $f(x) = \sin 2x$.
5, 6	а) $f(x) = 2x - 3$;	б) $f(x) = e^{-3x}$.
7, 8	а) $f(x) = -3x + 1$;	б) $f(x) = \cos 3x$.
9, 10	а) $f(x) = 3x + 5$;	б) $f(x) = e^{3x}$.

Критерії оцінювання практичного заняття:

Задача 4			
Бали	Критерій		
15	Розв'язання задачі свого варіанту	15	Студент правильно, в повному об'ємі виконує практичне завдання згідно з наданими методичними інструкціями
		-2	-2 бали за кожну помилку
-1	Термін виконання	-1	При несвоєчасному виконанні завдання -1 бал за кожен прострочений день
Максимальна кількість балів: 15			

5 ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ СТИСКАЮЧИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Тема заняття: застосування принципу стискаючих відображень до розв'язування систем лінійних рівнянь.

Мета заняття: формування вмінь і навичок практичного застосування знань через виконання здобувачами завдань та вправ, розв'язування задач.

Очікувані результати навчання: вміти розв'язувати отримані задачі чисельними методами.

Теоретичний матеріал: [3, с. 8–12].

Методика виконання: використання методики принципу стискаючих відображень, **наприклад**, методом послідовних наближень розв'язати систему лінійних рівнянь з точністю 10^{-2} :

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 + x_4 = -70, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_4 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 9x_4 = 59, \\ 12x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 = -276. \end{cases}$$

Розв'язок.

Запишемо систему у матричній формі $Ax = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 12 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -70 \\ -2 \\ 59 \\ -276 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо (для уникнення помилки кожен студент обчислює на власному калькуляторі або комп'ютері, а потім порівнюють результат) визначник системи: $\Delta = -2765 \neq 0$, отже, система має єдиний розв'язок. Обчислюємо (всі подальші громіздкі обчислення також проводяться усіма учасниками навчального процесу, а потім порівнюються між собою) максимальне власне значення матриці $A^T A$:

$$\lambda(A^T A) = 260,27179.$$

Запишемо вихідну систему у вигляді

$$\left(I - \frac{A^T A}{\lambda(A^T A)} \right) x + \frac{A^T B}{\lambda(A^T A)} = x; \quad Cx + D = x$$

(I – одинична матриця). Обчислюємо максимальне власне значення матриці C :

$$\lambda(C) = 0,97507.$$

Маємо коефіцієнт стиснення $\alpha = \lambda(C)$.

Для знаходження наближеного розв'язку системи застосуємо метод простих ітерацій. Обираємо (довільним чином) початкове наближення:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При точності $\varepsilon = 10^{-2}$ апіорна оцінка числа ітерацій $N_{apr} = 444$. Фактично знадобилося (уточнюємо цей момент під час загальних обчислень) 274 ітерації. Отриманий розв'язок:

$$x_{274} = \begin{pmatrix} -21,99468 \\ 0,99329 \\ -5,00516 \\ 12,99990 \end{pmatrix}.$$

Якщо для перевірки знайти розв'язок вихідної системи за формулами Крамера або методом Гаусса, розв'язок становить

$$x = \begin{pmatrix} -22 \\ 1 \\ -5 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Порівнюємо розв'язки з метою оцінки похибки:

$$\rho_2(x_{274}, x) = 0,00999 < 10^{-2},$$

тобто система розв'язана з точністю, що задовольняє умову задачі.

Задача 5, варіанти 1-10. Методом послідовних наближень розв'язати систему 3-х лінійних рівнянь з 3-ма невідомими з точністю 10^{-2} .

№	Завдання	№	Завдання
1	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 3, \\ x_2 - 2x_3 = -7, \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$	6	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$
2	$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 - x_2 = -3. \end{cases}$	7	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -8. \end{cases}$

№	Завдання	№	Завдання
3	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -8, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -4. \end{cases}$	8	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -4, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 5x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 - 3x_3 = -5, \\ x_1 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$	9	$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -8, \\ 4x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -7, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$	10	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$

Критерії оцінювання практичного заняття:

Задача 5			
Бали	Критерій		
20	Розв'язання задачі свого варіанту	20	Студент правильно, в повному об'ємі виконує практичне завдання згідно з наданими методичними інструкціями
		-2	-2 бали за кожну помилку
-1	Термін виконання	-1	При несвоєчасному виконанні завдання -1 бал за кожен прострочений день
Максимальна кількість балів: 20			

6 ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ СТИСКАЮЧИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Тема заняття: застосування принципу стискаючих відображень до розв'язування диференціальних рівнянь.

Мета заняття: формування вмінь і навичок практичного застосування знань через виконання здобувачами завдань та вправ, розв'язування задач.

Очікувані результати навчання: вміти розв'язувати отримані задачі чисельними методами.

Теоретичний матеріал: [3, с. 8–10, 12–14].

Методика виконання: використання методики принципу стискаючих відображень, **наприклад** методом послідовних наближень розв'язати задачу Коші

$$y' = y \cos x + \sin 2x, \quad y(0) = -1.$$

Така задача рівносильна рівнянню

$$y(x) = -1 + \int_0^x (y(t) \cos t + \sin 2t) dt.$$

Після спрощення отримуємо рівняння

$$y(x) = \int_0^x \cos t \cdot y(t) dt - \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

Застосовуємо метод простих ітерацій. Рекурентна формула в цьому випадку має вигляд

$$y_n(x) = \int_0^x \cos t \cdot y_{n-1}(t) dt - \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

Оберемо довільним чином початкове наближення, наприклад $y_0(x) = x$.
Маємо

$$y_1(x) = -\frac{3}{2} + \cos x + x \sin x - \frac{1}{2} \cos 2x,$$

$$y_2(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{7}{4} \sin x + \frac{3}{8} \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{12} \sin 3x \quad \text{і т. д.}$$

Задача 6, варіанти 1-10. Методом послідовних наближень розв'язати задачу Коші.

№	Завдання	№	Завдання
1	$\begin{cases} y' = 3x + y - 2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$	6	$\begin{cases} y' = 6x + y - 4, \\ y(0) = 0. \end{cases}$
2	$\begin{cases} y' = 4x + y - 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$	7	$\begin{cases} y' = 5x - y - 3, \\ y(0) = 0. \end{cases}$
3	$\begin{cases} y' = 3x - y + 5, \\ y(0) = 0. \end{cases}$	8	$\begin{cases} y' = 6x - y + 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$
4	$\begin{cases} y' = 4x - y + 2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$	9	$\begin{cases} y' = 7x + y + 3, \\ y(0) = 0. \end{cases}$
5	$\begin{cases} y' = 5x + y + 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$	10	$\begin{cases} y' = 7x - y + 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

Критерії оцінювання практичного заняття:

Задача 6			
Бали	Критерій		
17	Розв'язання задачі свого варіанту	17	Студент правильно, в повному об'ємі виконує практичне завдання згідно з наданими методичними інструкціями
		-2	-2 бали за кожну помилку
-1	Термін виконання	-1	При несвоєчасному виконанні завдання -1 бал за кожен прострочений день
Максимальна кількість балів: 17			

7 ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ СТИСКАЮЧИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Тема заняття: застосування принципу стискаючих відображень до розв'язування інтегральних рівнянь.

Мета заняття: формування вмінь і навичок практичного застосування знань через виконання здобувачами завдань та вправ, розв'язування задач.

Очікувані результати навчання: вміти розв'язувати отримані задачі чисельними методами.

Теоретичний матеріал: [3, с. 8–10, 14–16].

Методика виконання: використання методики принципу стискаючих відображень, наприклад, методом послідовних наближень розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = \lambda \int_0^1 (x - t^2) y(t) dt + x^3 + 1.$$

Це є інтегральне рівняння Фредгольма другого роду. Коефіцієнт стиснення

$$\alpha = \lambda \max_{x \in [0;1]} \int_0^1 |x - t^2| dt < 1.$$

Для обчислення інтеграла зауважимо:

$$-1 \leq x - t^2 \leq 1;$$

$$x - t^2 \geq 0 \Rightarrow t^2 \leq x \Rightarrow 0 \leq t \leq \sqrt{x};$$

$$x - t^2 < 0 \Rightarrow x < t^2 \Rightarrow \sqrt{x} < t \leq 1.$$

$$\int_0^1 |x - t^2| dt = \int_0^{\sqrt{x}} (x - t^2) dt + \int_{\sqrt{x}}^1 (t^2 - x) dt = \frac{4}{3} x \sqrt{x} - x + \frac{1}{3};$$

$$\max_{x \in [0;1]} \left(\frac{4}{3} x \sqrt{x} - x + \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}.$$

Виразимо параметр λ з відповідної умови:

$$\alpha = \frac{2}{3} \lambda < 1 \Rightarrow \lambda < \frac{3}{2}.$$

Візьмемо $\lambda = 1/2$ та застосуємо метод простих ітерацій для знаходження наближеного розв'язку рівняння. Маємо

$$y(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - t^2) y(t) dt + x^3 + 1.$$

Рекурентна формула для обчислень:

$$y_n(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - t^2) y_{n-1}(t) dt + x^3 + 1.$$

Оберемо довільним чином початкове наближення, наприклад $y_0(x) \equiv 1$.
Маємо

$$y_1(x) = x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{6};$$

$$y_2(x) = x^3 + \frac{2}{3}x + \frac{103}{144};$$

$$y_3(x) = x^3 + \frac{187}{288}x + \frac{617}{864} \quad \text{і т. д.}$$

Задача 7, варіанти 1-10. Методом послідовних наближень розв'язати інтегральне рівняння.

№	Завдання	№	Завдання
1	$y(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{x-t} y(t) dt + e^x.$	6	$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 t \sin x y(t) dt + \cos x.$
2	$y(x) = \int_0^1 x e^{x-t} y(t) dt + e^x.$	7	$y(x) = \int_0^x y(t) dt + x^2.$
3	$y(x) = \int_0^1 x t y(t) dt + \sqrt{1-x^2}.$	8	$y(x) = \int_0^x y(t) dt + \frac{x^2}{2}.$
4	$y(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin t y(t) dt + \sin x.$	9	$y(x) = \int_0^x (x-t) y(t) dt + x.$
5	$y(x) = \int_0^1 \sqrt{x t} y(t) dt + x.$	10	$y(x) = 1 - \int_0^x \operatorname{tg} t y(t) dt.$

Критерії оцінювання практичного заняття:

Задача 7			
Бали	Критерій		
17	Розв'язання задачі свого варіанту	17	Студент правильно, в повному об'ємі виконує практичне завдання згідно з наданими методичними інструкціями
		-2	-2 бали за кожну помилку
-1	Термін виконання	-1	При несвоєчасному виконанні завдання -1 бал за кожен прострочений день
Максимальна кількість балів: 17			

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Федак І. В. Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри. Навчальний посібник. Ч.1. Вимірні множини та вимірні функції. – Івано-Франківськ: ПНУ імені Василя Стефаника, 2020. – 52с.
2. Федак І. В. Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри. Навчальний посібник. Ч.2. Інтеграл Лебега. – Івано-Франківськ: ПНУ імені Василя Стефаника, 2020. – 56с.
3. Федак І. В. Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри. Навчальний посібник. Ч.3. Основні структури функціонального аналізу. – Івано-Франківськ: ПНУ імені Василя Стефаника, 2020. – 48с.
4. Збірник задач з функціонального аналізу. Видання друге, виправлене і доповнене. / Укладачі В. Б. Брайман, О. Ю. Константинов, О. Г. Кукуш, Ю. С. Мішура, О. Н. Нестеренко, А. В. Чайковський. – К.: 2023.
5. Мокін Б.І. Функціональний аналіз, адаптований до прикладних задач в галузі інформаційних технологій : навчальний посібник / Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін. – Вінниця : ВНТУ, 2020. – 192 с.

Навчальне видання

Олевська Юлія Борисівна

ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Методичні рекомендації до практичних занять
для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 113 (F1) Прикладна математика

Видано в авторській редакції

Електронний ресурс.
Підписано до видання 12.06.2025. Авт. арк. 1,4.

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»
49005, м. Дніпро, просп. Дмитра Яворницького, 19